ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο.

Α2. α. Βλέπε σχολικό βιβλίο.

β. Βλέπε σχολικό βιβλίο.

Α3. 1. Λάθος

2. Λάθος

3. Σωστό

4. Λάθος

5. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $x>0,\ f'(x)\geq \ell nx+1\ (1)$ και $f'\left(\frac{x}{e}\right)\leq \ell nx$ Αντικαθιστώ όπου x το xe οπότε:

$f'(x)\leq \ell n(xe)\Rightarrow f'(x)\leq \ell nx+1$ (2). Από (1) και (2) έχουμε: $f'(x)=\ell nx+1$

Β2. $f'(x)=(x\ell nx)'\Rightarrow f(x)=x\ell nx+c, c\in\Re$ $\quad f(1)=0$ άρα c=0 και $f(x)=x\ell nx$

Β3. ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=x-1$

Β4. Ελέγχω το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-y$

Έστω $g(x)=x\ell nx-x+1, x\in[1,e^2]$, $h'(x)=\ell nx>0, x\in(1,e^2)$

Άρα h γνησίως αύξουσα στο $[1,e^2]$, με $h(x)\geq h(1)\Rightarrow h(x)\geq 0$

Το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

$$E=\int_1^{e^2}(x\ell nx-x+1)dx=\int_1^{e^2}x\ell nxdx-\int_1^{e^2}(x-1)dx=\ldots(\text{παραγοντική})\ldots=\frac{1}{4}(e^4+4e^2-1)\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f_{min}=-2<f(\beta)=1<2=f(a)<3=f_{max}$

Θα υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=-2$ και $f(x_2)=3$

Έστω $x_1<x_2$. Τότε εφαρμόζουμε Θ. Bolzano στο $[x_1,x_2]\subseteq(\alpha,\beta)$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Γ2. Τα x_1,x_2 εσωτερικά σημεία του (α,β)

Η f παραγωγίσιμη στο (α, β)

Η f παρουσιάζει ακρότατα στα x_1,x_2

Από Θ. Fermat $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

Άρα η C_F δέχεται δύο οριζόντιες εφαπτομένες στα σημεία $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$.

Γ3. Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)\left[f'(x)+f^{2016}(x)\right]$

- g συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq(\alpha,\beta)$
- $g(x_1)=f(x_1)\left[f'(x_1)+f^{2016}(x_1)\right]=-2(-2)^{2016}<0$
- $g(x_2)=f(x_2)\left[f'(x_2)+f^{2016}(x_2)\right]=3(3)^{2016}>0$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$

Γ4. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$και $[x_o, \beta]$ όπου $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$.
f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, x_0]$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_o - a} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(j_1)} = \frac{x_o - a}{-2}$$

f παραγωγίσιμη στο$[x_o, \beta]$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_0, \beta)$:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2f'(\xi_2)} = \frac{\beta - x_0}{2}$$

Άρα $\dfrac{1}{f'(\xi_1)} - \dfrac{1}{2f'(\xi_2)} = \dfrac{\alpha - x_0}{2} - \dfrac{\beta - x_0}{2} = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. f συνεχής στο R, $f(x) \neq 0$ Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0, x \in \Re$

Δ2. Η f συνεχής στο $[0,2016]$

- $f(0) = 1$
- $f(2016) = 2016$

Από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει $\xi \in (0,2016)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2$
Έχουμε:

$$\frac{f(f(\xi))}{f(f(\xi)+2)} = \frac{f(f(\xi)+1)}{f(f(\xi)-1)} \Leftrightarrow \frac{f(2)}{f(4)} = \frac{f(3)}{f(1)} \Leftrightarrow f(2)f(1) = f(3)f(4)$$

Δ3. Η g συνεχής στο $[1,2]$ με $g(1) = f(1)[f(1) - f(2)]$ και $g(2) = -f(2)[f(1) - f(2)]$
Άρα $g(1)g(2) = -f(1)f(2)[f(1) - f(2)]^2 \leq 0$
Αν $g(1)g(2) < 0$ από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1,2)$: $y(x_0) = 0$
Αν $g(1)g(2) = 0$ τότε $g(1) = g(2) = 0$ και $x_0 = 1$ ή $x_0 = 2$
Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [1,2]$: $g(x_0) = 0$

Δ4. Ισχύει $g(x) = f^2(x) - f(1)f(2)$ και $f(1)f(2) = f(3)f(4)$ άρα $g(x) = f^2(x) - f(3)f(4)$
Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano στο $[3,4]$

$$\left.\begin{aligned} g(3) &= f(3)(f(3) - f(4)) \\ g(4) &= -f(4)(f(3) - f(4)) \end{aligned}\right\} g(3)g(4) \leq 0$$

Αν $g(3)g(4) = 0$ τότε $g(3) = g(4) = 0$
Αν $g(3)g(4) < 0$ τότε υπάρχει $x_1 \in (3,4)$ τέτοιο ώστε $g(x_2) = 0$
Τότε $g(x_1) = g(x_0) = 0$ άρα η f ΔΕΝ είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Επίσης $g(x_1) = g(x_0) \Leftrightarrow f^2(x_1) - f(1)f(2) = f^2(x_o) - f(1)f(2) \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} f^2(x_1) &= f^2(x_0) \\ f(x) &> 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$f(x_1) = f(x_0)$ με $x_1 \neq x_0$ αφού $x_0 \in [1,2]$ και $x_1 \in (3,4)$
Άρα η f δεν είναι 1-1 και δεν αντιστρέφεται.

Δ5. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle στο $[x_0, x_1]$ για την f οπότε υπάρχει $\xi \in (x_0, x_1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ και τότε $g'(\xi) = 2f'(\xi)f(\xi) = 0$
Δηλαδή οι εφαπτομένες των C_F και C_G στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi,)g(\xi)$ είναι παράλληλες.